アルゴリズム論（第9回）

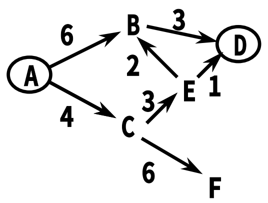
2003.12.08
櫻井　彰人
algorithm@soft.ae.keio.ac.jp
http://www.sakurai.comp.ae.keio.ac.jp/

きょうの講義概要

- グラフ（2）
  - グラフのアルゴリズム（復習）
  - フロイトの方法
  - グラフ理論からの補足
  - 第一回課題 再レポートについて
- 原理、アルゴリズム、計算量、正当性、実際問題での利用

5.6 ダイクストラ法

- 各辺に距離のついた有向グラフ上で任意の2点間の最短距離を求める（最終的にはすべての節への最短距離）



考え方：
出発の節から近い節を順次たどる。結果的には、指定された出発の節から全部の節への最短経路が求められる。

アルゴリズム5.2 ダイクストラ法

- 入力：各辺に距離のついた有向グラフ、出発の節
- 出力：出発の節からすべての節への最短距離
- 内容
  - （1）U ← 空集合; V ← すべての節の集合; s ← 出発の節; dist(s) ← 0, dist(u) ← ∞ (u ≠ s)
  - （2）V が空集合でない間、以下を繰り返す
    - » (2.1) p ← Vの要素で距離が最小の節
    - » (2.2) p を V から除き、U に加える

ダイクストラ法（2）

- » (2.3) p から直接結ばれている節すべてに対して以下を繰り返す
  - (2.3.1) x ← そのうちで一つ適当に選ばれた節
  - (2.3.2) x がVに属していれば、dist(x) ← min(dist(x),dist(p)+この辺の距離)
- ダイクストラ法の計算量
  - （2）と（2.3）のところで2重のループ
    - » 多めに見積もって $O(n^2)$

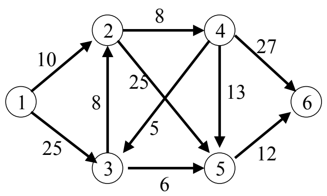
ダイクストラ法の正当性

(a) sからの距離と経路がすでに確定した各節uに対して、dist(u)がsからuへの最短距離であり、uまでの最短経路は確定した節だけから成っている

(b) まだ経路が確定していない各節uに対しては、dist(u)がsからuへのある経路集合で最短の距離（そのような経路が一つもないときは∞）

演習問題1

- 下図で ①→⑥ の最短路を求めよ



演習問題2

- ある機器を5年間リースで使用したい。費用はリース料と維持費の合計である。総費用を最小化するにはどうしたらよいか。

リース料（契約期間の合計金額）
単位M￥

from＼to	07年	08年	09年	10年	11年
2006年	5	9	13	15	16
2007年		6	10	17	17
2008年			7	15	15
2009年				9	12
2010年					11

維持費（該当期間の合計）
単位M￥

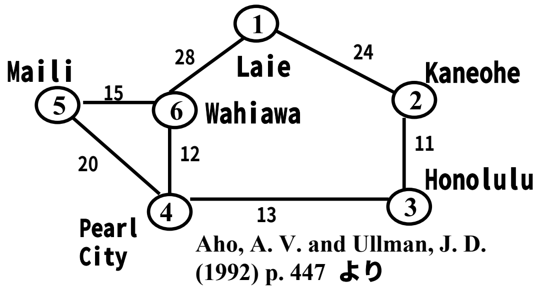
1年間	1
2年間	3
3年間	6
4年間	11
5年間	16

5.6 フロイトのアルゴリズム

- 特定の出発の節を決めず、すべての節間の最短距離を求める
  - すべての節に対してダイクストラ法を適用しても求まる
    - » 計算量が $O(n^3)$ に
- $a_k(i,j)$ を、$a_1, a_2, ..., a_n$ と求める
  - $a_k(i,j)$ = k番以下の節だけを経由して i から j へ至る最短経路の距離（k番目の節：ピボット）

例題

- ハワイのオアフ島の町をめぐる

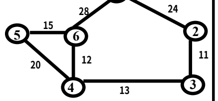


Aho, A. V. and Ullman, J. D. (1992) p. 447 より

例題の行列表現

- はじめの行列の (i,j) 要素
  - i から j へ直接つながる辺のラベル（距離）

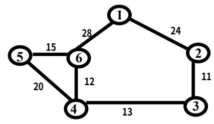
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 24 & \infty & \infty & \infty & 28 \\
24 & 0 & 11 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 11 & 0 & 13 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 13 & 0 & 20 & 12 \\
\infty & \infty & \infty & 20 & 0 & 15 \\
28 & \infty & \infty & 12 & 15 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



例題の実行（1）

- 1の節だけを経由してよいときの行列
  - 1の節を経由点に

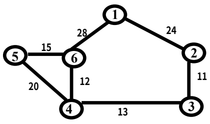
	1	2	3	4	5	6
1	0	24	∞	∞	∞	28
2	24	0	11	∞	∞	52
3	∞	11	0	13	∞	∞
4	∞	∞	13	0	20	12
5	∞	∞	∞	20	0	15
6	28	52	∞	12	15	0



例題の実行（2）

- 1と2の節を経由してよいときの行列
  - 2の節を新しい経由点に

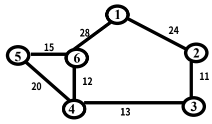
	1	2	3	4	5	6
1	0	24	35	∞	∞	28
2	24	0	11	∞	∞	52
3	35	11	0	13	∞	63
4	∞	∞	13	0	20	12
5	∞	∞	∞	20	0	15
6	28	52	63	12	15	0



例題の実行（3）

- 1、2、3の節を経由してよいときの行列
  - 3の節を経由点に

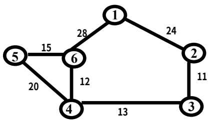
	1	2	3	4	5	6
1	0	24	35	48	∞	28
2	24	0	11	24	∞	52
3	35	11	0	13	∞	63
4	48	24	13	0	20	12
5	∞	∞	∞	20	0	15
6	28	52	63	12	15	0



例題の実行（4）

- 1、2、3、4の節を経由してよいときの行列
  - 4の節を新たな経由点に

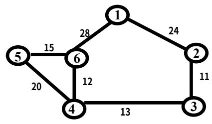
	1	2	3	4	5	6
1	0	24	35	48	68	28
2	24	0	11	24	44	36
3	35	11	0	13	33	25
4	48	24	13	0	20	12
5	68	44	33	20	0	15
6	28	36	25	12	15	0



例題の実行（5）

- 最終的な行列

	1	2	3	4	5	6
1	0	24	35	40	43	28
2	24	0	11	24	44	36
3	35	11	0	13	33	25
4	40	24	13	0	20	12
5	43	44	33	20	0	15
6	28	36	25	12	15	0



アルゴリズム5.3 フロイトのアルゴリズム(Floyd-Warshall algorithm)

- 入力：グラフのn個の節間の距離を表わす n×n行列 arc(v,w)
- 出力：各節間の最短距離を表わす行列
- 内容
- （1）v = 1 から n まで以下を繰り返す
  - (1.1) w = 1 から n まで以下を繰り返す
    - » (1.1.1) dist(v,w) ← arc(v,w)

フロイトのアルゴリズム（2）

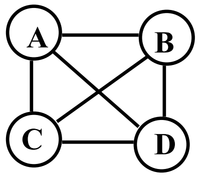
- ◆ (2) u = 1 から n まで以下を繰り返す
  - (2.1) v = 1 から n まで以下を繰り返す
    - » (2.1.1) w = 1 から n まで以下を繰り返す
      - ◆ (2.1.1.1) dist(v,u) + dist(u,w) < dist(v,w)ならば dist(v,w) ← dist(v,u) + dist(u,w)
- dist(v,w)：節v から節w までの距離（途中結果の場合もある）
- arc(v,w)：節v から節w への直接つながった辺の距離（入力行列の(v,w)要素）

フロイトのアルゴリズムの正当性

- アルゴリズム5.3 において、経由点集合を通るすべての経路でdist(v,w) は 節v と 節w の最短距離（証明は数学的帰納法）
- k以下の節だけを中間の節とする v から w への経路：k-path
- 命題S(k)：アルゴリズム5.3の (2) のループに関して、u が k のループ終了のときに、dist(v,w) は v から w への最短の k-path であるか、または経路が存在せずに ∞

5.7 グラフ理論からの補足（1）

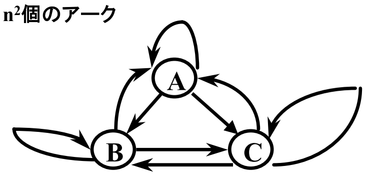
- 無向グラフが完全（complete）グラフ
  - すべての節の間に辺がある
  - n個の節の完全グラフ：K_n
    - 辺の数は ${}_nC_2$（= n(n-1)/2）個



K_4

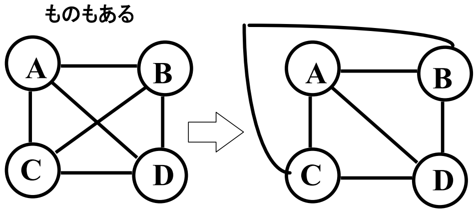
グラフ理論からの補足（2）

- 有向グラフが完全（complete）グラフ
  - 自分自身を含めてすべての節を互いに結ぶ辺がある
  - n個の節の完全グラフ
    - n^2個のアーク



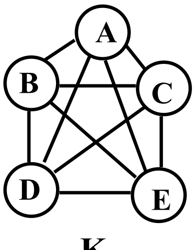
グラフ理論からの補足（3）

- 平面グラフ（A Planar Graph）
  - どの辺も交差しないで1平面上に書くことのできるグラフ
    - 辺と節の関係を変えないで平面グラフで表現できるものもある

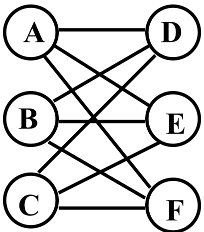


グラフ理論からの補足（4）

- 非平面グラフの例：K_5 と $K_{3,3}$



K_5



$K_{3,3}$

グラフ理論からの補足（5）

- クラトフスキー（Kuratowski）の定理
  - すべての非平面グラフは、前に示したK_5と$K_{3,3}$のうちの少なくとも一つの「コピー」を含む
- グラフの平面性の応用
  - 平面グラフと同等なグラフは、辺の交差をなくして表示したほうが分かりやすい
  - 集積回路の設計では、平面にできるものは1平面にしたほうが集積度を増すことができる